Αλγεβρικές Δομές Ι
26 Ιουνίου 2018

1. (2 μονάδες) Θεωρούμε τα ακόλουθα στοιχεία της S_{11}:

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 10 & 5 & 4 & 7 & 8 & 1 & 2 & 6 & 9 & 11 \end{pmatrix}, \tau=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 11 & 7 & 6 & 3 & 10 & 2 & 8 & 9 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

   (1′) Να προσδιορισθούν οι τροχιές των σ, τ στις οποίες διαμερίζεται το σύνολο $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ και να γίνει η ανάλυση σε ξένους κύκλους των τ, σ, σ^3.

   (2′) Να υπολογιστεί η μετάθεση σ^{2019}.

   (3′) Να βρεθεί $x \in S_{11}$ ώστε: $x \circ \sigma \circ x^{-1} = \tau$.

2. (1 μονάδα) Να εξετάσετε αν η απεικόνιση $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{15}$ με τύπο $\varphi(m,n) = [10m + 6n]_{15}$ είναι ομομορφισμός δακτυλίων. Στην περίπτωση που είναι δείξτε ότι

$$\text{Ker}\, \varphi = \{\, (3a, 5b) \mid a, b \in \mathbb{Z} \,\}.$$

3. (1 μονάδα) Βρείτε όλους τους ομομορφισμούς ομάδων από το $\mathbb{Z}_{35}$ στο $\mathbb{Z}_{15}$. Ποιοί από αυτούς είναι και ομομορφισμοί δακτυλίων;

4. (1 μονάδα) Έστω $m \geq 2$. Εξετάστε αν το σύνολο $\mathbb{Z}_m \times U(\mathbb{Z}_m)$ με πράξη $*$, που ορίζεται: $(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 b_2 + a_2, b_1 b_2)$ είναι ομάδα.

5. (1 μονάδα) Έστω H κανονική υποομάδα μιας ομάδας G με δείκτη m. Δείξτε ότι $a^m \in H$ για κάθε $a \in G$.

6. (1 μονάδα) Ένας δακτύλιος R λέγεται δακτύλιος του *Boole* αν $a^2 = a$ για κάθε $a \in R$. Δείξτε ότι ένας δακτύλιος του *Boole* που είναι και ακεραία περιοχή είναι σώμα. Με ποιό γνωστό σας σώμα είναι ισόμορφος;

7. (1 μονάδα) Δείξτε ότι η $H =< ([4]_8, [1]_3) >$ είναι κανονική υποομάδα της $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3$ και βρείτε με ποιά γνωστή σας ομάδα είναι ισόμορφη η $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3 / H$.

8. (1 μονάδα) Είναι οι πολλαπλασιαστικές ομάδες $U(\mathbb{Z}_{24})$ και $U(\mathbb{Z}_{20})$ ισόμορφες; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

9. (1 μονάδα) Δείξτε ότι η ομάδα $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ δεν είναι κυκλική.

Καλή επιτυχία